Certain aperiodic automorphisms of unital simple projectionless C^*-algebras (Problems in theory of operator algebras)

佐藤, 康彦

数理解析研究所講究録
第 1627 巻 2009 年 72-86

Certain aperiodic automorphisms of unital simple projectionless C^*-algebras

北海道大学理学院数学科
佐藤　康彦　(Yasuhiko Sato)

Department of Mathematics
Hokkaido University.

1 Introduction

Jiang-Su algebra を代表とする非自明な projection の無い C^*-algebra について、これらは C^*-algebra の分類理論において重要な役割を持っている。本講演では projection の無い C^*-algebra の自己同型の共役性について、以下の定理を中心に述べる。

定理 1.1. A を 単位的、単純、*projectionless* を満たす、後述の補題 *2.1* で得られる 帰納的極限 *C^*-algebra* とする。(これは $K_1(A)$ が与えられた有限巡回群の帰納的極限となり、かつ 唯一つの *trace* τ を持つ。) この *C^*-algebra* A の自己同型 α, β について以下が成立する。もし、α, β が $\mathrm{Aut}(A)/\,\mathrm{WInn}(A)$ の中で非周期的な時、任意の $\varepsilon > 0$ に対して　近似的内部自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(A)$ と $\gamma = \mathrm{Ad}\, W \in \mathrm{WInn}(A)$、 $W \in U(\pi_\tau(A)'')$ が存在してこれらは $\pi_\tau \circ \gamma = \mathrm{Ad}\, W \circ \pi_\tau$、 $\|W - 1\|_2 < \varepsilon$、

$$\alpha = \gamma \circ \sigma \circ \beta \circ \sigma^{-1}$$

を満たす。

ここで、$\mathrm{WInn}(A)$ とは

$$\mathrm{WInn}(A) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(A) : \pi_\tau \circ \alpha = \mathrm{Ad}\, W \circ \pi_\tau, \quad W \in U(\pi_\tau(A)'')\}$$

のことを表し、π_τ は τ による GNS-表現を表す。

定理の中で扱う C^*-algebra は2節の補題によって具体的に構成される。これは Jiang-Su algebra の構成の一般化となっている。従って $G=\{0\}$ の場合、$\mathcal{Z}$ は、Jiang-Su algebra となる。定理の中で扱う群が有限巡回群の帰納的極限と特殊な群を扱っているが、これは Jiang と Su の論文 [8] の中で分類されている C^*-algebra の K_1-群がこれらのみなので本講演で扱う群もこれらに限りたい。一般に可算なアーベル群によって同様の結果を得ることを目指すならば、具体的に C^*-algebra を構成する所から考えなければならない。C^*-algebra の構成は本講演の最後で報告する定理により与えているが、本講演では有限巡回群の帰納的極限に限り上の主定理を述べていく。

定理 1.1 について、自己同型の分類としての位置付けを簡単に説明する。まず、von Neumann algebras の 自己同型については Connes [2] により von Neumann algebras の自己同型に関する Rohlin の性質を用いて研究されている。特に彼は injective type II_1-factor の自己同型を outer conjugacy により分類している。C^*-algebras の場合については、岸本により C^*-algebra に関する Rohlin の性質をもつ自己同型についていくつかの結果が得られている ([9], [10], [11], [12])、これらは finite C^*-algebra に関するものである。Rohlin の性質を持つ自己同型の分類について infinite C^*-algebras の場合は、中村 [15] により非周期的な自己同型として特徴付けられ、KK-class によりこれらが分類されている。これら全ての結果は Rohlin の性質を定義するため、projection を多く含む real rank 0 を持つ C^*-algebra の上でなされている。そこで我々は、projectionless C^*-algebra の上でこれらの議論がどの様に形を変えて現れるかという事に興味を持った。上述の主定理をその一つの結果と位置付けたい。特に Jiang-Su algebra を projection の無い C^*-algebra として扱った動機については第4節で説明する。

2 A construction of projectionless C^*-algebras

まず Jiang-Su algebra の構成からはじめる。Jiang-Su algebra の building block は Prime dimension drop algebra と呼ばれる以下の C^*-algebra であった。

$$\mathbf{I}_n=\{f\in C([0,1],M_{p_nq_n});f(0)\in M_{p_n}\otimes 1_{q_n},\ f(1)\in 1_{p_n}\otimes M_{q_n}\},$$

ここで、p_n, q_n は互いに素な自然数とする。この C^*-algebra の K-群は

$$(K_0(\mathbf{I}_n),K_0(\mathbf{I}_n)_+,[1_{\mathbf{I}_n}])=(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_+,1),\quad K_1(\mathbf{I}_n)=\{0\}$$

この事から、$\mathbf{I}_n$ により作られる帰納的極限 C^*-algebra の K_1 群は $\{0\}$ になり、かつ projection が自明なものしか現れない。Jiang-Su algebra の構成方

法は connecting map $\varphi_n : \mathbf{I}_n \hookrightarrow \mathbf{I}_{n+1}$ を適当にとり、得られる帰納的極限 C^*-algebra が単純で、trace を唯一つしか持たないものにする事である。具体的には P, Q という十分に大きな互いに異なる素数をとり、次の $\mathbf{I}_{n+1}$ の添え字を $p_{n+1} = Pp_n$, $q_{n+1} = Qq_n$ とおく。増幅数の総和 $m = PQ$ を次の様に分ける。

$$m = PQ = aq_{n+1} + r_0 = bp_{n+1} + r_1$$

ここで、r_0, r_1 は $0 < r_0 \le q_{n+1}$, $0 < r_1 \le p_{n+1}$ を満たす自然数とする。これらの添え字により $\xi_j^{(n)}$, $j = 1, 2, ..., m$ を

$$\xi_j^{(n)}(t) = \begin{cases} 1/2t, & 1 \le j \le r_0 \\ 1/2, & r_0 < j \le m - r_1 \\ 1/2t + 1/2, & m - r_1 < j \le m, \end{cases}$$

により定義し、$\xi^{(n)}(f) = \bigoplus_{j=1}^{m} f \circ \xi_j^{(n)}$, $f \in \mathbf{I}_n$ とおく。この定義により

$$\xi^{(n)}(f)(0) = f(0) \otimes 1_{r_0} \oplus f(1/2) \otimes 1_{m-r_0}$$

となるが、$q_{n+1} | r_0 q_n$, $q_{n+1} | m - r_0$ により unitary $u_0 \in U(M_{d_{n+1}})$ が存在して

$$u_0 \xi^{(n)}(f)(0) u_0^* \in M_{p_{n+1}} \otimes 1_{q_{n+1}}$$

を満たす。同じく $t = 1$ の点でも、$u_1 \in U(M_{d_{n+1}})$ が存在して、

$$u_1 \xi^{(n)}(f)(1) u_1^* \in 1_{p_{n+1}} \otimes M_{q_{n+1}}$$

を満たす。u_0, u_1 をつなぐ unitary を $u \in U(C([0,1]) \otimes M_{d_{n+1}})$ とし、$\varphi_n = \mathrm{Ad}\, u \circ \xi^{(n)}$ と置くと、$\mathcal{Z} = \lim(\mathbf{I}_n, \varphi_n)$ は単純かつ唯一つの trace を持つ、[8]。

定理 1.1 で扱う projection の無い C^*-algebra について、この構成は building block を $A_n =$

$$\{f \in C([0,1], M_{p_n q_n g_n}); f(0) \in M_{p_n} \otimes 1_{g_n q_n},\ f(1) \in 1_{g_n p_n} \otimes M_{q_n}\},$$

とする、但し、ここでも p_n, q_n は互いに素な自然数とし、$g_n \in \mathbb{N}$ は有限巡回群の位数となる。この C^*-algebra の K-群は、

$$(K_0(A_n), K_0(A_n)_+, [1_{A_n}]) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, 1), \quad K_1(A_n) = \mathbb{Z}/g_n\mathbb{Z}$$

となる。上の Jiang-Su algebra と似た構成により、但し添え字の取り方を少し注意深くとって、connecting map $\varphi_n : A_n \hookrightarrow A_{n+1}$ を定義すると、$A = \lim(A_n, \varphi_n)$ で表す帰納的極限 C^*-algebra は単純で、かつ唯一つの trace を持ち、$K_1(A)$ が与えられた有限巡回群の帰納的極限となる。定理の形で述べると以下の通り。

補題 2.1. *G を有限巡回群の帰納的極限とおく。 この時 dimension drop algebra $A_n = \mathbf{I}[p_n, d_n, q_n]$, $(p_n, q_n) = 1$ の列と、単射的 $*$-homomorphisms $\varphi_n : A_n \hookrightarrow A_{n+1}$ で以下を満たすものが存在する。帰納的極限 C^*-algebra $A = \varinjlim(A_n, \varphi_n)$ は 単位的、単純、 projectionless C^*-algebra で、 唯一つの trace τ を持ち、 $K_1(A) = G$ を満たす。*

3 UHF-algebra

第2節で与えた 非自明な projection の無い C^*-algebra の構成から次の事が自然に示せる。

命題 3.1. *A を補題 2.1 で与えられた projectionless C^*-algebra、τ を A の唯一つの trace とする。この時、UHF algebra B と matrix algebra からなる building block B_n, $n \in \mathbb{N}$ が $\pi_\tau(A)''$ の中に存在して、以下を満たす。*

$$B = \overline{(\bigcup B_n)}^{\|\cdot\|},$$

$$\pi_\tau(A) \subset B \subset \pi_\tau(A)'',$$

$$(\pi_\tau(A) \cap B_n')'' = \pi_\tau(A)'' \cap B_n'.$$

証明の概説は以下の通り。$d_n = p_n q_n g_n$, $C_n = C([0,1]) \otimes M_{d_n}$ と置く。今、前述の構成から $\varphi_n : A_n \hookrightarrow A_{n+1}$ が得られているが、これは自然に $\varphi_n : C_n \hookrightarrow C_{n+1}$ へ拡張できる。$B = \lim(C_n, \varphi_n)$ と置くと、これが欲しい UHF-algebra になる。この事は特に [21] が詳しい。また、この B を更に詳しく考察すると、欲しい性質を満たす B_n が得られる。詳細は [20] を参照されたし。

UHF-algebra の自己同型について、一般に AT-algebra もしくは purely infinite C^*-algebra の自己同型について、Evans Kishimoto の intertwining argument と呼ばれる outer conjugate にする以下の定理がある。

定理 3.2. *B を UHF-algebra、τ を B の唯一つの trace、α, $\beta \in \mathrm{Aut}(B)$ とする。この時、もし $[\alpha]$, $[\beta] \in \mathrm{Aut}(B)/\mathrm{WInn}(B)$ が非周期的ならば、unitary $u \in U(B)$ と $\sigma \in \mathrm{Aut}(B)$ が存在して*

$$\alpha = \mathrm{Ad}\, u \circ \sigma \circ \beta \circ \sigma^{-1}$$

を満たす。

このEvans Kishimoto の intertwining argument は証明の中で主に用いるRohlin の性質が、projection からなる単位の分解によって定義されているので、直接 projection の無い C^*-algebra に適応する方法は知られていない。定理 1.1 の証明はこの Evans Kishimoto の intertwining argument を構成法から自然に得られた命題 3.1 の UHF-algebra の上で議論して、その過程で B_n の relative commutant の性質から projection の無い C^*-algebra A の自己同型にする方法をとる。

以下 定理 1.1 の証明の概要を述べる。

自己同型に関する intertwining argument を行うが、証明で用いる stability は Connes による hyper finite type II_1-factor $\pi_\tau(A)''$ に対する以下のもの。

補題 3.3. *M を hyper finite type II_1-factor、τ を M の trace と置く。θ を M の 非周期的な自己同型と仮定する。(i.e., 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し θ^n は外部的) この時、任意の $\varepsilon > 0$ と M の有限部分集合 F に対し、$\delta > 0$ と 有限部分集合 G が存在して以下を満たす。任意の unitary $u \in M$ で、$\|[u, y]\|_2 < \delta$, $y \in G$ を満たすものに対して、unitary $v \in M$ が存在して $\|u - v\theta(v^*)\|_2 < \varepsilon$ かつ $\|[v, x]\|_2 < \varepsilon$, $x \in F$ を満たす。ここで $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{1/2}$。更に, もし F が空集合の場合は G は同じく空集合としてよい。*

この stability を $\overline{\alpha} \in \mathrm{Aut}(\pi_\tau(A)'')$ に適応する事により 任意の $u \in U(\pi_\tau(A)'' \cap B'_n)$ に対して、$v' \in U(\pi_\tau(A)'')$ が存在して

$$v'\overline{\alpha}(v')^* \approx_{\|\cdot\|_2} u$$

$$[v', x] \approx_{\|\cdot\|_2} 0, \quad x \in (B_{n-1})^1$$

を得る。この v' を用いて、E.K. intertwining argument を行なうと、$\sigma_0, \sigma_1 \in \mathrm{Aut}(\pi_\tau(A)'')$ が存在して、

$$\sigma_1 \circ \overline{\alpha} \circ \sigma_1 = \mathrm{Ad}\, w \circ \sigma_0 \circ \overline{\beta} \circ \sigma_0^{-1},$$

$$\sigma_i = \lim \mathrm{Ad}\, v'_{2n+1+i} \circ \mathrm{Ad}\, v'_{2n-1+i} \circ \cdots v'_i, \quad v'_{2n-1+i} \in U(\pi_\tau(A)''),\ i = 0, 1.$$

を満たすものが得られる。但し、一般には v'_{2n+1+i} と v'_{2n-1+i} は $\|\cdot\|_2$ に関してのみ可換性を持ち

$$\sigma_i = \lim \mathrm{Ad}\, v'_{2n+1+i} \circ \mathrm{Ad}\, v'_{2n-1+i} \circ \cdots v'_i \notin \mathrm{Aut}(\pi_\tau(A))$$

であり、

$$\mathrm{Ad}\, v'_{2n+1+i} \notin \mathrm{Aut}(\pi_\tau(A)), \quad i = 0, 1$$

となる。この可換性を C^*-algebra の norm に関する可換性にする事と、v' を $\pi_\tau(A)$ の中に入れる事が避けるべき問題となる。実際、intertwining argument の帰納法の中で表れる状況を説明すると以下の通り。今、v_{2n-1} が $\pi_\tau(A)$ の中に入っているとする。$2n$ を大きくとり B_{2n} の中に C^*-algebra の norm に関し近似的に含ませることができる。$\|\cdot\|_2$ に関し、

$$\mathrm{Ad}\, u_{2n+1} \circ \alpha_{2n-1} \approx_{\|\cdot\|_2} \beta_{2n} \ on\ B_{2n+1},$$

ここで、

$$\alpha_{2n-1} = \mathrm{Ad}\, u_{2n-1} \circ \alpha_{2n-3}, \quad \beta_{2n} = \mathrm{Ad}\, u_{2n} \circ \beta_{2n-2}$$

を満たす $u_{2n+1} \in U(\pi_\tau(A))$ が得られる。この u_{2n+1} に関し stability より $v'_{2n+1} \in U(\pi_\tau(A)'')$ が得られ以下を満たす。

$$[v'_{2n+1}, x] \approx_{\|\cdot\|_2} 0, \quad x \in (B_{2n})^1.$$

この可換性を norm の可換性にするため有限次元環に関する conditional expectation Φ を間に挟む。つまり $\Phi : \pi_\tau(A)'' \to B'_{2n} \cap \pi_\tau(A)''$ により $v''_{2n+1} = \Phi(v'_{2n+1}) \approx_{\|\cdot\|_2} v'_{2n+1}$. を定義する。$v''_{2n+1} \in \pi_\tau(A)'' \cap B'_{2n} = (\pi_\tau(A) \cap B'_{2n})''$ により $v_{2n+1} \in \pi_\tau(A) \cap B'_{2n}$ が存在して、

$$v_{2n+1} \approx_{\|\cdot\|_2} v''_{2n+1} \approx_{\|\cdot\|_2} v'_{2n+1}$$

を満たす。この v_{2n+1} は v_{2n-1} と C^*-algebra の norm に関し可換となるので、

$$\sigma_1 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ad}\, v_{2n+1} v_{2n-1} \cdots v_1 \in \mathrm{Aut}(\pi_\tau(A))$$

となる自己同型が得られる。同じく、β の側でも intertwining argument により、$\sigma_0 \in \pi_\tau(A)$ の自己同型が得られる。結果、unitary $W \in U(\pi_\tau(A)'')$ が得られ、

$$\sigma_0 \circ \overline{\alpha} \circ \sigma_0^{-1} = \mathrm{Ad}\, W \circ \sigma_1 \circ \overline{\beta} \circ \sigma_1^{-1}$$

を満たす。ここで、W は誤差が集まり $\pi_\tau(A)''$ の unitary だが、この関係式から $\mathrm{Ad}\, W$ は $\pi_\tau(A)$ を不変にし、この C^*-algebra $\pi_\tau(A)$ の自己同型になる。結果、$[\alpha] \sim [\beta]$ が従う。

この定理 1.1 の結論は $\mathrm{Ad}\, W$ が weakly inner automorphism なので、定理 3.2 と比べると弱い結論になるが、その分 定理 1.1 の仮定では α, β が同一の K-群の値を持つという条件を課していない弱い仮定となっている。この K-群の条件によらない事を見る目的で、対象となる projection の無い C^*-algebra を Jiang-Su algebra から拡張して考察した。

4 Motivation for the main theorem

Jiang-Su algebra $\mathcal{Z}$ を吸収する real rank 0 を持つ C^*-algebra A について、この上で与えられた自己同型 $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ に対し asymptotically unitarily equivalent の範囲で α を変形して Rohlin の性質を付け加える問題が考えられる。ここで Rohlin の性質とは以下の定義とする。

定義 4.1. A を 単位的 C^*-algebra、α を A の自己同型とする。次の性質を満たす時 α は Rohlin の性質を持つと言う。任意の $k \in \mathbb{N}$、A の有限部分集合 F、$\varepsilon > 0$ に対し projection からなる単位の分解 $\{e_j^{(0)} : j = 0, ..., k-1\} \cup \{e_j^{(1)} : j = 0, ..., k\} \subset P(A)$ が存在し

$$\sum_{j=0}^{k-1} e_j^{(0)} + \sum_{j=0}^{k} e_j^{(1)} = 1_A,$$

$$\|\alpha(e_j^{(i)}) - e_{j+1}^{(i)}\| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \quad j = 0, ..., k+i-2,$$

$$\|[a\ , e_j^{(i)}]\| < \varepsilon,$$

$a \in F$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1, ..., k+i-1$ を満たす。

このRohlin の性質は A. Kishimoto [12] により定義されたものである。A が purely infinite C^*-algebra の場合、Kirchberg の定理から $A \cong A \otimes \mathcal{O}_\infty$ なので $\mathcal{O}_\infty$ 上の Rohlin の性質を持つ自己同型 $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_\infty)$ をテンソルすることで $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ と asymptotically unitarily equivalent な Rohlin の性質を持つ自己同型が得られる。同様の事が、$\mathcal{Z}$ の場合にも示せるのではないかと期待される。但し、$\mathcal{Z}$ は projection が無いので適切に Rohlin の性質を定義する方法は未だ知られていない。しかし、Rohlin の性質に近い次の様な自己同型が得られている。

任意の $k \in \mathbb{N}$、$\mathcal{Z}$ の有限部分集合 F、$\varepsilon > 0$ に対し positive element からなる単位の分解 $\{f_j : j = 0, ..., k-1\} \subset \mathcal{Z}$ が存在し

$$\tau(1 - \sum_{j=0}^{k-1} f_j) < \varepsilon,$$

$$\sigma(f_j) = f_{j+1}, \quad j = 0, ..., k-2,$$

$$\|f_i f_j\| < \varepsilon, \quad i \neq j$$

$$\|[a\ , f_j]\| < \varepsilon,\ a \in F,\ j = 0, 1, ..., k-1$$

を満たす。

このσを用いて次の事が示せている。ある性質のよいTAF-algebra A で $A \otimes \mathcal{Z} \cong A$ を満たすものについて、$\mathcal{O}_\infty$ と同様に、任意の α に対して $\alpha \otimes \sigma$ は Rohlin の性質を持つ。ここでTAF-algebra A が満たすよい性質とは技術的な物であるので省略するが、広いクラスのTAF-algebraについてこの性質が示せる [20]。特にこのクラスは Rohlin の性質を持つ自己同型による接合積について閉じている。$\alpha \otimes \sigma$ が Rohlin の性質を持つ事は以下の補題とその技術的な性質を用いる事で示される。

補題 4.2. A を 単位的 *TAF-algebra* で $A \otimes \mathcal{Z} \cong A$ を満たすとする。この時、任意の自己同型 $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ と $k \in \mathbb{N}$ に対し、*projection* からなる単位の分解 $(p_n)_n \in P((A \otimes \mathcal{Z})_\infty)$ が得られて以下を満たす。$((\alpha \otimes \sigma)^j(p_n))_n$ は互いに $(A \otimes \mathcal{Z})_\infty$ の中で直行する、但し $j = 0, 1, ..., k-1$、

$$\tau(1_{A\otimes\mathcal{Z}} - \sum_{j=0}^{k-1}(\alpha \otimes \sigma)^j(p_n)) < n^{-1}, \quad \text{for any } \tau \in T(A \otimes \mathcal{Z}),$$

ある $c > 0$ で以下を満たすものが存在する、任意の $q \in P(A \otimes \mathcal{Z})$ と $\varepsilon > 0$ に対し大きい自然数 $N_q \in \mathbb{N}$ が存在し

$$c\tau(q) - \varepsilon \leq \tau(qp_n), \quad \tau \in T(A \otimes \mathcal{Z}),\ n \geq N_q$$

を満たす。

証明は [20] の中に詳しく載せたのでここでは省く。

またこの自己同型 σ について、次の事も示せている。

定理 4.3. $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{Z})$ が 上述の条件 *(positive element* による *Rohlin* の性質*)* を満たす事と以下は同値。

$$[\sigma] \in \mathrm{Aut}(\mathcal{Z}) / \mathrm{WInn}(\mathcal{Z}).$$

主定理の動機とは、このσを数学的に一意化させたいという事です。

5 A generalization of dimension drop algebras

1節で簡単に述べたが、任意の可算アーベル群 G に対して、これを K_1-群として実現する projection の無い C^*-algebra が具体的に構成できる。これは Jiang-Su algebra の構成方法の拡張である。

定理 5.1. Gを可算アーベル群とする。この時 単位的、単純、*projectionless*、*trace*を唯一持つC^**-algebra* A_Gと、*dimension drop algebra*からなる *building block* A_n、*connecting map* $\varphi_n : A_n \hookrightarrow A_{n+1}$ が得られ次を満たす。

$$K_1(A_G) = G, \quad A_G = \lim(A_n, \varphi_n),$$

$$A_G \otimes \mathcal{Z} \cong A_G.$$

ここで言う dimension drop algebra とは 有限生成アーベル群に対して得られる以下の C^*-algebra。定義のため少し記号を準備する。

p_i を i 番目の素数、G_n を有限生成アーベル群とおく。$G_{n,0}$ を G_n の自由アーベル部分群、$G_{n,1}$ を G_n のねじれ部分群とおく。この時 $r_0^{(n)} = \mathrm{rank}(G_{n,0}) \in \mathbb{Z}_+$ と定義する。$i \in \mathbb{N}$ で $p_i|\ |G_{n,1}|$ となるものに対し、$G_{n,i}$ を G_n の部分群で $\{g \in G_n; o(g) = p_i^n, n \in \mathbb{N}\}$ により生成されるものとおく、ここで $o(g)$ は g の位数を表す。$r_i^{(n)} \in \mathbb{N}$ と $d_{i,j}^{(n)} \in \mathbb{N}, j = 1, ..., r_i^{(n)}$ を

$$G_{n,i} = \bigoplus_{j=1}^{r_i^{(n)}} \mathbb{Z}_{d_{i,j}^{(n)}}, \quad d_{i,j}^{(n)} = p_i^{k_{i,j}^{(n)}},$$

を満たす自然数とする。つまり $G_{n,1}$ は $(p_i^{k_{i,j}^{(n)}})-$ 型の有限アーベル群。ここで $k_{i,j}^{(n)} \in \mathbb{N}, k_{i,j}^{(n)} \le k_{i,j+1}^{(n)}, G_{n,i,j} = \mathbb{Z}_{d_{i,j}^{(n)}}$ とおく。G_n は

$$G_n = G_{n,0} \oplus G_{n,1} = \mathbb{Z}^{r_0^{(n)}} \oplus \bigoplus_{p_i|\ |G_{n,1}|} \bigoplus_{j=1}^{r_i^{(n)}} \mathbb{Z}_{d_{i,j}^{(n)}}$$

と直既約分解される。$g_{i,j}^{(n)}$ を G_n の 標準的生成元で

$$g_{0,j}^{(n)} = (0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus 1_j \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) \oplus 0_{G_{n,1}},\ 1 \le j \le r_0^{(n)}$$

$$g_{i,j}^{(n)} = 0_{G_{n,0}} \oplus (0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus 1_{G_{n,i,j}} \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0),\ 1 \le j \le r_i^{(n)}$$

とおく。

上で表された有限生成アーベル群 G_n に対して、

$$S^{(n)} = \{(0,0),(0,1)\} \cup \bigcup_{p_i|\ |G_{n,1}|} \{(i,j); j = 1,2,...,r_i^{(n)}\}$$

と定義する。$I_{i,j}^{(n)}$, $(i,j) \in S^{(n)}$ を $[0,2\pi]$ 区間と置く、$T_j^{(n)}$, $j=1,2,...,r_0^{(n)}$ を $r_0^{(n)}$ 個のトーラス $\mathbb{T}=\{e^{it}; t\in[0,2\pi]\}$ と置き、$z(t)=e^{it}\in\mathbb{T}$, $t\in\mathbb{R}$ と定める。同一視を 写像 $\iota_{i,j}^{(n)}:[0,2\pi]\to I_{i,j}^{(n)}$, $(i,j)\in S^{(n)}$ と写像 $\tau_j^{(n)}:\mathbb{T}\to T_j^{(n)}$, $j=1,2,...,r_0^{(n)}$ により定める。X_n を one point union

$$X_n = I_{0,0}^{(n)} \vee I_{0,1}^{(n)} \vee \bigvee_{j=1}^{r_0^{(n)}} T_j^{(n)} \vee \bigvee_{p_i |\ |G_{n,1}|} \bigvee_{j=1}^{r_i^{(n)}} I_{i,j}^{(n)},$$

により表し、その基点を $\iota_{i,j}^{(n)}(0)$, $(i,j)\in S^{(n)}$, $\tau_j^{(n)}(z(0))$, $j=1,2,...,r_0^{(n)}$ により定め、$c^{(n)}=\tau_j^{(n)}(z(0))=\iota_{i,j}^{(n)}(0)\in X_n$ とおく。また端点をそれぞれ $a_{i,j}^{(n)}=\iota_{i,j}^{(n)}(2\pi)\in X_n$, $(i,j)\in S^{(n)}$ と定義する。

有限生成アーベル群 G_n と互いに素な $\widetilde{p}_n$, $\widetilde{q}_n\in\mathbb{N}$ で $|G_{n,1}|\mid\widetilde{p}_n\widetilde{q}_n$ を満たすものに対し、C^*-algebra $A(G_n,\widetilde{p}_n,\widetilde{q}_n)$ を

$$A(G_n,\widetilde{p}_n,\widetilde{q}_n)=\{f\in C(X_n)\otimes M_{d_n}; f(a_{0,0}^{(n)})\in M_{\widetilde{p}_n}\otimes 1_{\widetilde{q}_n},\ f(a_{0,1}^{(n)})\in M_{\widetilde{q}_n}\otimes 1_{\widetilde{p}_n},$$
$$f(a_{i,j}^{(n)})\in M_{d_n/d_{i,j}^{(n)}}\otimes 1_{d_{i,j}^{(n)}}\},$$

とおく、ここで $d_n=\widetilde{p}_n\widetilde{q}_n$ ($d_{i,j}^{(n)}=p_i^{k_{i,j}^{(n)}}$)。これら $A(G_n,\widetilde{p}_n,\widetilde{q}_n)$ を本講演では G_n, $\widetilde{p}_n$, $\widetilde{q}_n$ に対する *dimension drop algebra* と呼ぶ。特に我々は $I(\widetilde{p}_n,\widetilde{q}_n)$ により $\{0\}$, $\widetilde{p}_n$, $\widetilde{q}_n$ with $(\widetilde{p}_n,\widetilde{q}_n)$ =1 に対する dimension drop algebra を表す、(i.e.,

$$I(\widetilde{p}_n,\widetilde{q}_n)=\{f\in C(I_{0,0}^{(n)}\cup I_{0,1}^{(n)})\otimes M_{d_n}; f(a_{0,0}^{(n)})\in M_{\widetilde{p}_n}\otimes 1_{\widetilde{q}_n},\ f(a_{0,1}^{(n)})\in 1_{\widetilde{p}_n}\otimes M_{\widetilde{q}_n}\}),$$

これは Jiang-Su algebra の building block であった。

M_{d_n} の minimal projection $e_{0,0}$ を 一つ 固定して、$f_{0,j}^{(n)}\in A(G_n,\widetilde{p}_n,\widetilde{q}_n)$, $j=1,2,...,r_0^{(n)}$ と $f_{i,j}^{(n)}\in A(G_n,\widetilde{p}_n,\widetilde{q}_n)$, $(i,j)\in S^{(n)}$, $i\geq 1$, $j=1,2,...,r_i^{(n)}$ を以下で定義する。

$$f_{0,j}^{(n)}(x)=\begin{cases}\exp(ite_{0,0}), & x=\tau_j^{(n)}(z(t))\in T_j^{(n)},\ t\in[0,2\pi],\\ 1_{d_n}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$f_{i,j}^{(n)}(x)=\begin{cases}\exp(ite_{0,0}), & x=\iota_{i,j}^{(n)}(t)\in I_{i,j}^{(n)},\ t\in[0,2\pi],\\ 1_{d_n}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

以下の命題により、この dimension drop algebra が [8] における dimension drop algebra の自然な拡張であると考える。

命題 5.2. G_n を有限生成アーベル群で上述の様に表されたとする。$\widetilde{p}_n$ と $\widetilde{q}_n$ を自然数で $(\widetilde{p}_n, \widetilde{q}_n) = 1$, $|G_{n,1}| \mid \widetilde{p}_n\widetilde{q}_n$ を満たすものとおく。A_n を G_n, $\widetilde{p}_n$, $\widetilde{q}_n$ に対する *dimension drop C^*-algebra* $A(G_n, \widetilde{p}_n, \widetilde{q}_n)$ とおく。この時、

$$K_1(A_n) \cong G_n$$

であり、この同一視により

$$[f_{0,j}^{(n)}]_{K_1(A_n)} = g_{0,j}^{(n)},\ 1 \le j \le r_0^{(n)}, \quad [f_{i,j}^{(n)}]_{K_1(A_n)} = g_{i,j}^{(n)},$$

$(i,j) \in S^{(n)}$, $i \ge 1$ が成立する。

Proof. G_n, d_n $(=\widetilde{p}_n\widetilde{q}_n)$, $A_n = A(G_n, \widetilde{p}_n, \widetilde{q}_n)$ を上の形で表す。また $\mathbf{I}_n = I(\widetilde{p}_n, \widetilde{q}_n)$ とおく。ここで、我々は既に $K_1(\mathbf{I}_n) \cong \{0\}$ の結果を得ている。また記号を以下のように準備する。

$$\begin{aligned} B_{n,0} &= \bigoplus_{p_i \mid |G_{n,1}|} \bigoplus_{j=1}^{r_i^{(n)}} M_{d_n/d_{i,j}^{(n)}}, \\ X_{n,0} &= \bigcup_{j=1}^{r_0^{(n)}} \tau_j^{(n)}(z((0,2\pi))) \cup \bigcup_{p_i \mid |G_{n,1}|} \bigcup_{j=1}^{r_i^{(n)}} \iota_{i,j}^{(n)}((0,2\pi)) \subset X_n, \\ C_{n,0} &= C_0(X_{n,0}) \otimes M_{d_n}. \end{aligned}$$

定義から自然に以下の exact sequence が得られる。

$$0 \longrightarrow C_{n,0} \xrightarrow{\rho} A_n \xrightarrow{\sigma} \mathbf{I}_n \oplus B_{n,0} \longrightarrow 0.$$

これから K-群の exact sequence が以下のように導かれる。

$$K_0(\mathbf{I}_n \oplus B_{n,0}) \xrightarrow{\delta_0} K_1((C_{n,0})^\sim) \longrightarrow K_1(A_n) \longrightarrow 0,$$

ここで δ_0 とは exponential map を表す。

$(\widetilde{p}_n, \widetilde{q}_n) = 1$ により、$K_0(\mathbf{I}_n) \cong \mathbb{Z}$ かつ $[1_{\mathbf{I}_n}]_{K_0(\mathbf{I}_n)} = 1$ が得られる。$e_{i,j}$ を $M_{d_n/d_{i,j}^{(n)}} \subset B_{n,0}$ の minimal projection とおくと、以下が従う。$K_0(B_{n,0}) \cong \bigoplus_{p_i \mid |G_{n,1}|} \bigoplus_{j=1}^{r_i^{(n)}} \mathbb{Z}$ かつ

$$[e_{i,j}] = 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus 1_{i,j} \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \in K_0(B_{n,0})$$

また 簡単な計算から次が従う。$K_1((C_{n,0})^\sim) \cong \bigoplus_{j=1}^{r_0^{(n)}} \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{p_i | \ |G_{n,1}|} \bigoplus_{j=1}^{r_i^{(n)}} \mathbb{Z}$ かつ

$$[f_{0,j}^{(n)}]_{K_1((C_{n,0})^\sim)} = (0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus 1_j \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) \oplus 0_{\bigoplus_{i,j}\mathbb{Z}},$$

$$[f_{i,j}^{(n)}]_{K_1((C_{n,0})^\sim)} = 0_{\bigoplus_j \mathbb{Z}} \oplus (0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus 1_{i,j} \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0)$$

$h \in (A_n)_{\mathrm{sa}}$ と $u \in U((C_{n,0})^\sim)$ を次で定義する。

$$h(x) = \begin{cases} (1 - \frac{t}{2\pi})1_{d_n}, & x = \iota_{i,j}^{(n)}(t) \in I_{i,j}^{(n)},\ i \geq 1, \\ 1_{d_n}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$u(x) = \begin{cases} \exp(-it)1_{d_n}, & x = \iota_{i,j}^{(n)}(t) \in I_{i,j}^{(n)},\ i \geq 1, \\ 1_{d_n}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

δ_0 の定義により、 また $\sigma(h) = 1_{\mathbf{I}_n} \oplus 0_{B_{n,0}}$ かつ $\widetilde{\rho}(u) = \exp(2\pi i h)$ により 以下を得る。

$$\delta_0([1_{\mathbf{I}_n} \oplus 0_{B_{n,0}}]_{K_0(\mathbf{I}_n \oplus B_{n,0})}) = -[u] = 0_{\bigoplus_j \mathbb{Z}} \oplus (d_n \oplus \cdots \oplus d_n)$$

$h_{i,j}^{(n)} \in (A_n)_{\mathrm{sa}}$, $(i,j) \in S^{(n)}$ with $i \geq 1$ を以下で表す。

$$h_{i,j}^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{t}{2\pi} e_{i,j} \otimes 1_{d_{i,j}^{(n)}}, & x = \iota_{i,j}^{(n)}(t) \in I_{i,j}^{(n)},\ t \in [0, 2\pi], \\ 0_{d_n}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\sigma(h_{i,j}^{(n)}) = 0_{\mathbf{I}_n} \oplus e_{i,j}$ により、以下が従う。

$$\begin{aligned} \delta_0([0_{\mathbf{I}_n} \oplus e_{i,j}]) &= [\exp(-2\pi i h_{i,j}^{(n)})]_{K_1((C_{n,0})^\sim)} = -d_{i,j}^{(n)}[f_{i,j}^{(n)}] \\ &= 0_{\bigoplus_j \mathbb{Z}} \oplus (0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus -d_{i,j}^{(n)} \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) \end{aligned}$$

結果、次式が得られて証明が終了する。

$$\begin{aligned} K_1(A_n) &\cong K_1((C_{n,0})^\sim)/\delta_0(K_0(\mathbf{I}_n \oplus B_{n,0})) \\ &= \bigoplus_{j=1}^{r_0^{(n)}} \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{p_i | \ |G_{n,1}|} \bigoplus_{j=1}^{r_i^{(n)}} \mathbb{Z}_{d_{i,j}^{(n)}}, \end{aligned}$$

かつ

$$[f_{0,j}^{(n)}]_{K_1(A_n)} = [f_{0,j}^{(n)}]_{K_1((C_{n,0})^\sim)/\delta_0(K_0(\mathbf{I}_n \oplus B_{n,0}))} = g_{0,j}^{(n)},\ 1 \le j \le r_0^{(n)},$$

$$[f_{i,j}^{(n)}]_{K_1(A_n)} = [f_{0,j}^{(n)}]_{K_1((C_{n,0})^\sim)/\delta_0(K_0(\mathbf{I}_n \oplus B_{n,0}))} = g_{i,j}^{(n)},\ i \ge 1,\ (i,j) \in S^{(n)}.$$

∎

この 拡張された dimension drop algebra を building block として上述の projectionless C^*-algebra が得られるが、この projectionless C^*-algebra についても 同様の UHF-embeddability が示される事が解っている。故に、全く同様の方針でこの C^*-algebra についても主定理と同様の事が示せると期待できる。

References

[1] B. Blackadar. *Comparison theory for simple C^*-algebras.* Operator Algebras and Applications (London Math. Soc. Lecture Notes Series, 135). Ed. D. E. Evans and M. Takesaki. Cambridge University Press, Cambridge, 1988, pp. 21-54.

[2] A. Connes. *Outer conjugacy class of automorphisms of factors*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (4) **8** (1975), 383-420.

[3] G. A. Elliott. *On the classification of C^*-algebras of real rank zero.* J. Reine Angew. Math. 443 (1993), 179–219.

[4] G. A. Elliott and G. Gong. *On the classification of C^*-algebras of real rank zero, II.* Ann. of Math. (2) 144 (1996), 497-610.

[5] D. E. Evans and A. Kishimoto. *Trace scaling automorphisms of certain stable AF algebras.* Hokkaido Math. J. 26 (1997), no. 1, 211–224.

[6] R. H. Herman and A. Ocneanu. *Stability for integer actions on UHF C^*-algebras.* J. Funct. Anal. 59 (1984), no. 1, 132–144

[7] M. Izumi. *The Rohlin property for automorphisms of C^*-algebras.* Mathematical physics in mathematics and physics (Siena, 2000), 191–206, Fields Inst. Commun., 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[8] X. Jiang and H. Su. *On a simple unital projectionless C^*-algebra.* Amer. J. Math. 121 (1999), no. 2, 359–413.

[9] A. Kishimoto. *The Rohlin property for automorphisms of UHF algebras.* J. Reine Angew. Math. 465 (1995), 183–196.

[10] A. Kishimoto. *The Rohlin property for shifts on UHF algebras and automorphisms of Cuntz algebras.* J. Funct. Anal. 140 (1996), no. 1, 100–123.

[11] A. Kishimoto. *Automorphisms of AT algebras with the Rohlin property.* J. Operator Theory 40 (1998), no. 2, 277–294.

[12] A. Kishimoto. *Unbounded derivations in AT algebras. J. Funct. Anal. 160 (1998), no. 1, 270–311.*

[13] H. Lin. *Tracially AF C^*-algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 693-722.

[14] H. Lin. *The Rokhlin property for automorphisms on simple C^*-algebras.* Operator theory, operator algebras, and applications, 189–215, Contemp. Math., 414, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[15] H. Nakamura. *Aperiodic automorphisms of nuclear purely infinite simple C^*-algebras.* Ergodic Theory Dynam. Systems 20 (2000), no. 6, 1749–1765.

[16] H. Osaka and N. C. Phillips. *Stable and real rank for crossed products by automorphisms with the tracial Rokhlin property.* Ergodic Theory Dynam. Systems 26 (2006), no. 5, 1579–1621.

[17] H. Osaka and N. C. Phillips. *Furstenberg transformations on irrational rotation algebras.* Ergodic Theory Dynam. Systems 26 (2006), no. 5, 1623–1651.

[18] G. K. Pedersen. "C^*-algebras and their automorphism groups." London Mathematical Society Monographs, 14. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1979.

[19] M. Rørdam and W. Winter. *The Jiang-Su algebra revisited.* arXiv:0801.2259

[20] Y. Sato. *Certain aperiodic automorphisms of unital simple projectionless C^*-algebras,* arXiv:0807.4761 [math.OA] 29 Jul 2008.

[21] K. Thomsen. *Inductive limits of interval algebras: the tracial state space.* Amer. J. Math. 116 (1994), no. 3, 605–620.

[22] A. S. Toms and W. Winter. *Z-stable ASH algebras.*arXiv:math/0508218